Le proporzioni:
un potentissimo strumento matematico.

Nella vita di tutti i giorni capita molto spesso di avere a che fare con le proporzioni (in senso matematico). Si tratta di un concetto molto semplice e intuitivo. Succede spesso che il cambiamento o la variazione di “qualcosa” abbia effetto su “qualcos’altro”.

Facciamo un esempio. Se, per preparare il prossimo compito di scienze, studierete per cinque minuti, il voto sarà un 3, se studierete mezz’ora sarà un 4, se studierete per due ore sarà un 5 se studierete per 10 ore sarà magari un 8. Queste due **GRANDEZZE**, il “numero di ore di studio” e il “voto”, sono due grandezze **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI**, cioè all’aumentare di una aumenta anche l’altra.

Al contrario se il tempo che passate davanti alla televisione o sui social a scrivere stupidaggini, si limita a solo cinque minuti al giorno magari prenderete un 9, mentre se ci passate sei ore al giorno, avrete una buona possibilità di prendere un 3. In questo caso le due grandezze, “numero di ore passare davanti alla televisione o sui social” e ”voto”, sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI**.

Volendo fare altri esempi che siano più oggettivi e misurabili si può pensare alla velocità e al tempo. Se andate in auto da qualche parte, maggiore è la velocità, minore è il tempo che ci mettete per arrivare, dunque velocità e tempo sono inversamente proporzionali. Al contrario maggiore è la velocità del veicolo e maggiore sarà il consumo di carburante. Velocità e consumo di carburante sono direttamente proporzionali.

Per i più pignoli e per gli appassionati di matematica possiamo aggiungere che due grandezze sono **direttamente proporzionali** quando, **al loro variare, il rapporto rimane costante**, cioè:

$$y/x = K$$

mentre due grandezze sono **inversamente proporzionali** quando, **al loro variare, il prodotto rimane costante**, cioe:

$$y * x = K$$

Facciamo un **esempio pratico di due grandezze direttamente proporzionali** ed aiutiamoci con la ricetta delle crepes

Ingredienti per 12 crepes:

3 uova.
100 gr di zucchero.
300 ml di latte.
200 gr di farina.
50 gr di burro.

La ricetta ci dice che per fare 12 crepes mi occorrono 3 uova, in forma di rapporto posso scrivere 12/3.
Se volessi fare 24 crepes quante uova mi occorrerebbero?
La risposta è abbastanza ovvia, se raddoppio il numero di crepes devo raddoppiare anche il numero di uova, cioè 6, in forma di rapporto posso scrivere 24/6.
12/3 (dodici diviso tre) e 24/6 (ventiquattro diviso sei) hanno in effetti lo stesso valore (cioè quattro). Il rapporto tra queste due grandezze, crepes e uova, rimane costante.

In termini matematici abbiamo fatto questo ragionamento:

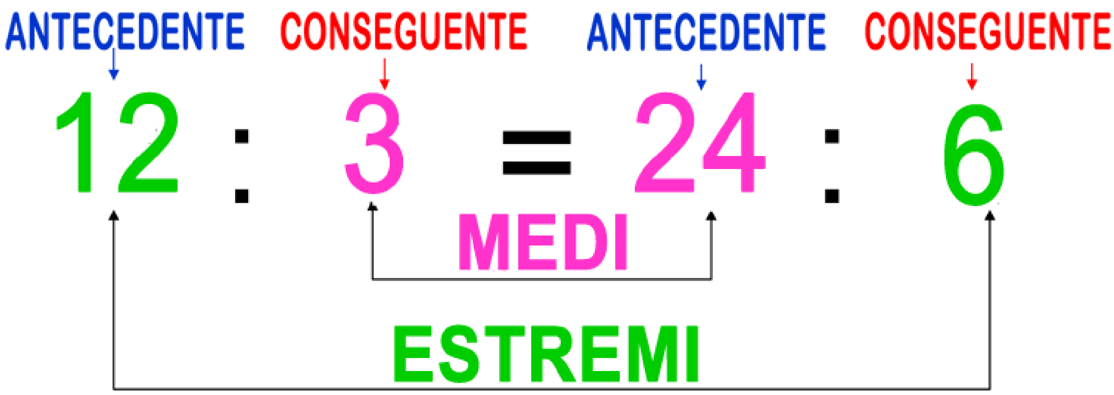
Se per fare	12 (crepes)	Ci vogliono	3 (uova)	Allora, se io voglio fare	24 (crepes)	Ho bisogno di	6 (uova)

Più semplicemente possiamo scrivere:

$$12 : 3 = 24 : 6$$

La proporzione che abbiamo scritto si legge in questo modo: dodici sta a tre, come ventiquattro sta a sei.

Più in generale una proporzione si struttura in questo modo:



In una proporzione come questa, se moltiplicate tra loro i due medi otterrete esattamente la stessa cifra che moltiplicando tra loro i due estremi. Questo significa che se uno dei termini è un'incognita, è molto semplice calcolarne il valore. Se uno degli estremi è sconosciuto basta moltiplicare tra loro i due medi e dividere per l'altro estremo, oppure se uno dei medi è sconosciuto, basta moltiplicare tra loro i due estremi e dividere per l'altro medio.

Si capisce meglio con un esempio.

Proviamo a complicare un po' le cose, torniamo alle nostre crepes e diciamo che avete messo su un'attività commerciale all'ingrosso. Un vostro cliente ha ordinato 67.576 crepes, avete tutto quello che vi serve, ma vi mancano le uova. Quante ne dovete comprare? Questa volta è un po' più difficile arrivarci ad intuito, ma possiamo ricorre alle proporzioni!

Ecco come impostare il ragionamento:

Se per fare	12 (crepes)	Ci vogliono	3 (uova)	Allora, se io voglio fare	67.576 (crepes)	Ho bisogno di	**Quante?** (uova)

In termini matematici possiamo scrivere:

$$12 : 3 = 67.576 : x$$

Cioè: 12 sta a 3, come 67.576 sta a x.

Moltiplichiamo tra loro i due medi e dividiamo per l'altro estremo

$$x = (3 \times 67.576) / 12 = 16.894$$

Vi servono 16.894 uova.

Ci si poteva arrivare anche impostando la proporzione in modo diverso.

Se mi occorrono	3 (uova)	Per fare	12 (crepes)	Allora,	**Quante?** (uova)	Devo comprare per fare	67.576 (crepes)

Cioè: 3 sta a 12 come x sta a 67.576

$$3 : 12 = x : 67.576$$

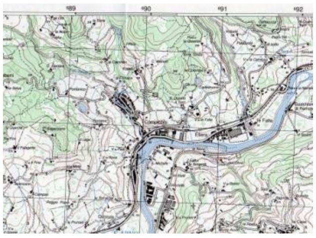
Moltiplichiamo i due estremi e dividiamo per l'altro medio

$$x = (3 \times 67.576) / 12 = 16.894$$

Come vedete si arriva esattamente allo stesso risultato.

Adesso lavoriamo un po' con le proporzioni

Problema n°1



Avete una carta topografica in scala 1:25.000 e dovete compiere un percorso che, misurato sulla vostra cartina, è di 7,6 cm. Per quanti chilometri dovrete camminare nella realtà?
La scala di una carta vi dice il rapporto che c'è tra una misura presa sulla carta e la stessa misura nella realtà. In particolare la scala di 1:25.000 (si legge uno a 25.000) ci dice che 1cm misurato sulla carta corrisponde a 25.000 cm nella realtà. A questo punto posso impostare una proporzione:

Se	1 (cm)	Nella carta corrisponde a	25.000 (cm)	Nella realtà, allora	7,6 (cm)	Misurati sulla carta corrisponderanno nella realtà a	Quanti? (cm)

Cioè: 1 sta a 25.000 come 7,6 sta a x

$$1 : 25.000 = 7,6 : x$$

Da cui

$$X = (25.000 \times 7,6)/1 = 190.000 \text{ cm}$$

Adesso basterà trasformare 190.000 cm in chilometri, cioè 1,9 km. (*non ditemi che non sapete fare le equivalenze!!!*)

Problema n°2

Un moderno telaio per la produzione di tessuti intreccia la trama e l'ordito 700 volte al minuto. In questo modo riesce a produrre 8,5 metri di stoffa ogni ora.
Con i vecchi telai artigianali si riusciva ad intrecciare trama e ordito 40 volte al minuto.
Qual era la produzione per quello stesso tessuto in metri/ora di questi vecchi telai?

Impostiamo la proporzione

Se con	700 (colpi al minuto)	Si riesce a produrre	8,5 (metri di tessuto per ogni ora)	Con i vecchi telai che battevano	40 (colpi al minuto)	Si riusciva a produrre	Quanti? (metri di tessuto per ogni ora)

Cioè: 700 sta a 8,5 come 40 sta a x

$$700 : 8{,}5 = 40 : x$$

Da cui

$$x = (40 \times 8{,}5) / 700 = 0{,}49 \text{ m}$$

Si riusciva a produrre 0,49 m (cioè 49 cm) di tessuto all'ora.

Problema n°3

Avete messo su una piccola azienda per la produzione di uova "bio" da galline allevate a terra. Attualmente possedete 175 galline e la vostra produzione è mediamente di 49.000 uova all'anno.
Il mercato consentirebbe alla vostra azienda di espandersi e vorreste arrivare ad una produzione di almeno 140.000 uova all'anno.
Quante galline servono per produrre questa quantità di uova?

Impostiamo la proporzione

Se con	175 (galline)	Si riesce a produrre	49.000 (uova all'anno)	Allora	Quante? (galline)	Mi servono per produrre	140.000 (uova all'anno)

Cioè: 175 sta a 49.000 come x sta a 140.000

$$175 : 49.000 = x : 140.000$$

Da cui

$$x = (175 \times 140.000) / 49.000 = 500$$

Il mio piccolo allevamento deve passare da 175 a 500 galline.

Problema n° 4

Torniamo alle nostre galline, ma questa volta proviamo a risolvere un problema in cui compaiono due **GRANDEZZE INVERSAMENTE PROPORZIONALI**.
Per nutrire le vostre galline vi rivolgete ad un fornitore di mangime che vi spedisce ogni volta una fornitura di 600 kg di mangime per galline ovaiole.
Le vostre 175 galline impiegano esattamente 30 giorni per consumare 600 kg di mangime. Se però il numero di galline salirà a 500, quanti giorni impiegheranno per consumare 600 kg di mangime? Naturalmente maggiore è il numero di galline, minore sarà il numero di giorni che impiegheranno le galline per finire la stessa quantità di mangime.

COME SI RAGIONA IN QUESTO CASO?
Non possiamo impostare la proporzione nel solito modo. Ricordiamo che una proporzione è un’uguaglianza tra due rapporti, ma quando abbiamo a che fare con due grandezze inversamente proporzionali quello che rimane costante è il loro prodotto.

La “proporzione” che scriviamo sarà quindi:

$$175 \times 30 = 500 \times X$$

Cioè i due prodotti rimangono costanti. La piccola equazione si risolve:

$$X = (175 \times 30)/500 = 10{,}5$$

Le mie 500 galline impiegheranno solo dieci giorni e mezzo per finire 600 kg di mangime.

Problema n°5 Un po’ di chimica non può mancare….

La legge delle proporzioni definite è stata enunciata dal chimico francese Joseph Louis Proust nel 1799. Essa dice che in un composto chimico, gli elementi che lo costituiscono stanno tra loro in rapporti di massa definiti e costanti. Tra le altre cose Proust si è basato sullo studio della pirite (FeS_2). Egli aveva notato che, indipendentemente dal luogo di provenienza, un grammo di questo minerale contiene sempre 0,54g di zolfo e 0,46g di ferro e questa proporzione si mantiene sempre.
La domanda è questa: avete un blocco di pirite pura di 7,6kg qual è la quantità di ferro presente?
Impostiamo la proporzione:

Se	1 (grammo di pirite)	Contiene	0,46 (grammi di ferro)	Allora se io ho	7.600 (grammi di pirite)	Ne posso ricavare	Quanti? (grammi di ferro)

Cioè 1 sta a 0,46 come 7.600 sta a x

$$1 : 0{,}46 = 7.600 : x$$

Da cui

$$x = (0{,}46 \times 7600)/1 = 3.496\text{g}$$

7,6 kg di pirite contengono circa 3,5 kg di ferro (arrotondando ad un decimale)

Problema n°6 Per finire affrontiamo la stechiometria (solo dalla terza liceo in poi)

Quando si bilancia una reazione chimica si scrivono davanti alla formula delle sostanze coinvolte i coefficienti stechiometrici (in rosso).
n

$$4Al + 3MnO_2 \Rightarrow 3Mn + 2Al_2O_3$$

Il chimico legge così: se faccio reagire **4** moli di alluminio con **3** moli di biossido di manganese, ottengo **3** moli di manganese e **2** moli di triossido di alluminio.
Ecco la domanda: se voglio ottenere 15 kg di manganese, quanto alluminio devo far reagire?

ATTENZIONE: poiché i coefficienti stechiometrici valgono solo per le moli, la prima cosa che dobbiamo fare è trasformare le quantità espresse in grammi, in quantità espresse in moli.
Poiché 1 mole di manganese ha una massa di 55g, 15 kg corrispondono a 273 moli.
Adesso possiamo impostare la proporzione

Se con	4 (moli di alluminio)	Ottengo	3 (moli di manganese)	Allora	Quante? (moli di alluminio)	Mi servono per ricavare	273 (moli di manganese)

Cioè 4 sta a 3 come x sta a 273

$$4 : 3 = x : 273$$

Da cui

$$x = (273 \times 4)/3 = 364 \text{ moli di alluminio.}$$

Poiché una mole di alluminio ha una massa di 23 g, questo significa che mi occorrono 23 x 364 = 8.372 g di alluminio.